Ausgewählte Kapitel aus der Mathematik
Differenzialrechnung

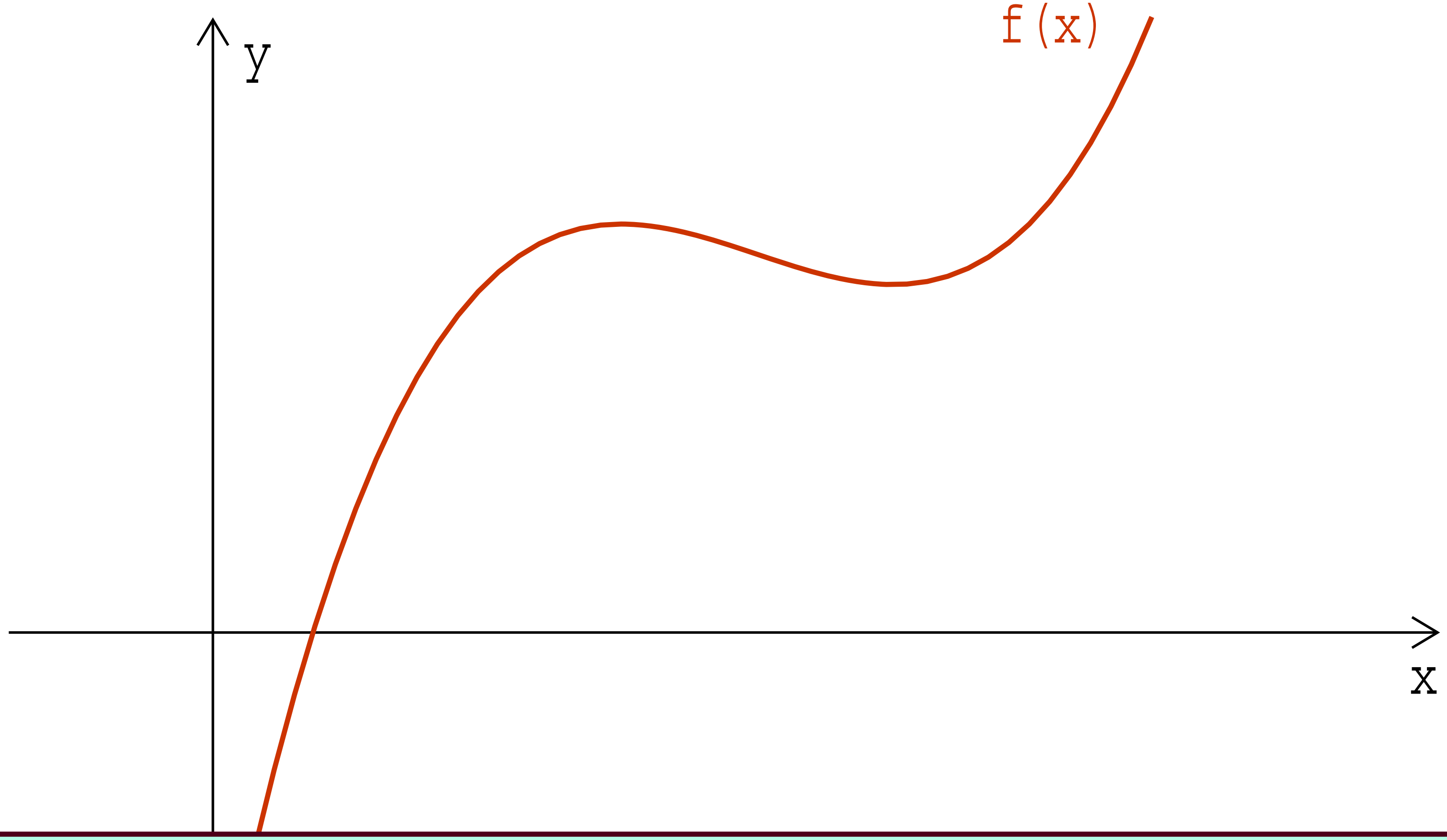
G. Wegener

Hannover, im November 2018,

Montag 12.11.2018 16:49:08
MATH/05_Differenzial

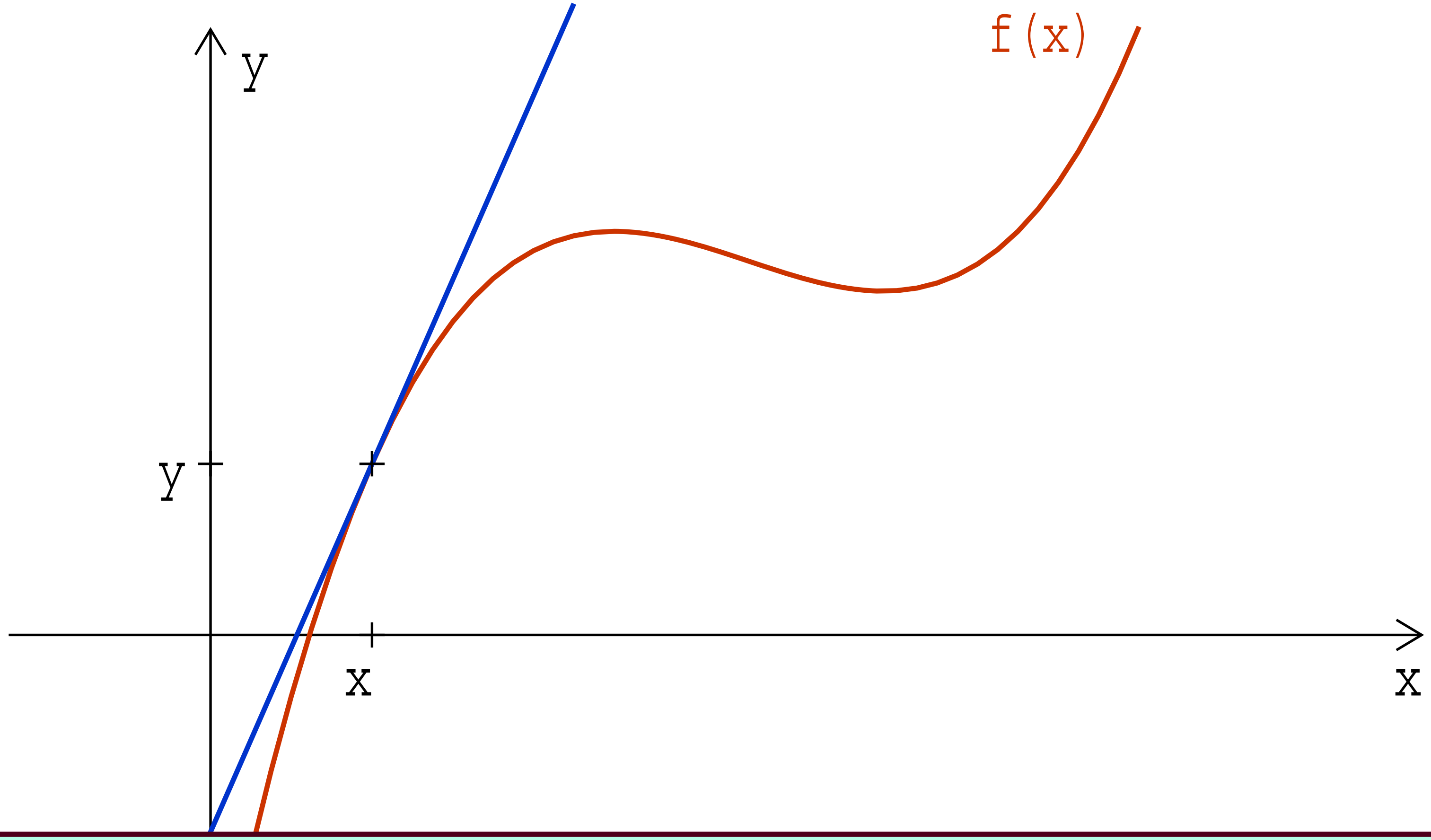
Differenzenquotient

Gegeben sei eine Funktion $f(x)$.



Differenzenquotient

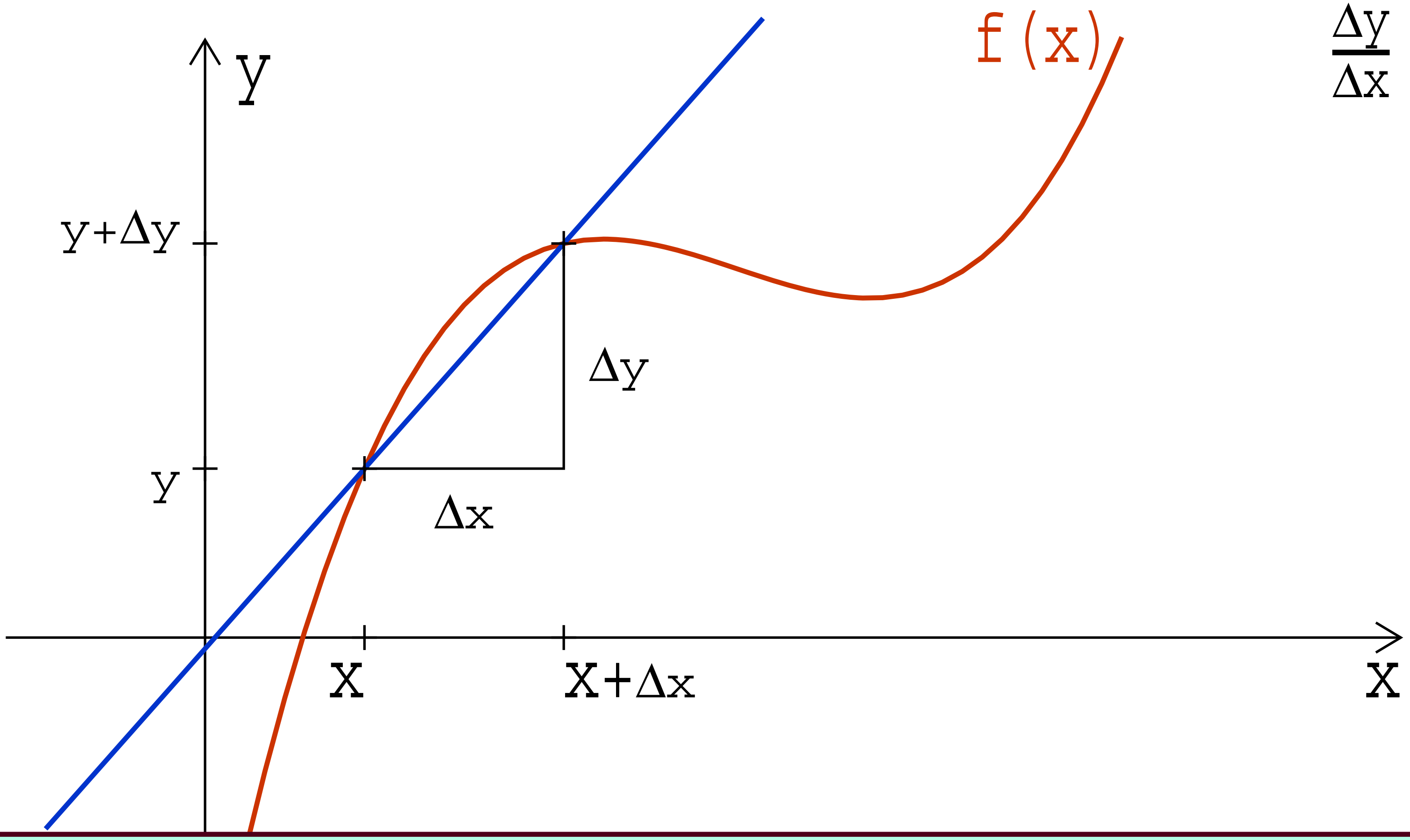
Gesucht ist die Tangente an der Stelle x, wobei nach Berechnung der Steigung diese mit Hilfe der Punkt-Steigungs-Form bestimmt werden kann.



Differenzenquotient

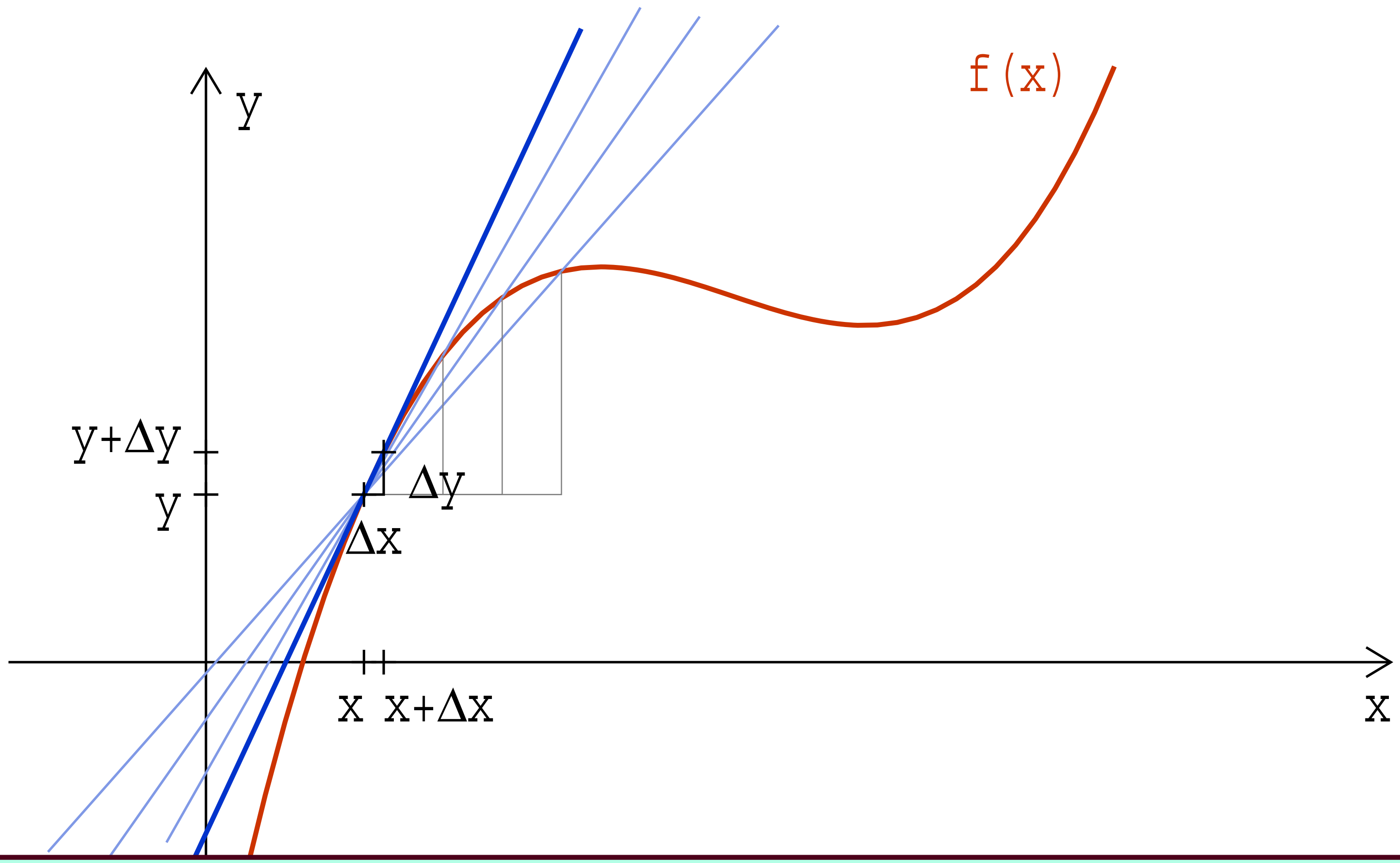
Man zeichne zunächst eine Sekante, die die Kurve im Punkte (x,y) und $(x+\Delta x, y+\Delta y)$ schneidet. Die Steigung beträgt dann

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$



Differenzenquotient

Nun lassen wir Δx gegen Null gehen.



Differenzialquotient

Gegeben sei ein Differenzenquotient $\Delta y/\Delta x$. Der **Differenzialquotient dy/dx** ist der Grenzwert des Differenzenquotienten $\Delta y/\Delta x$ für Δx gegen Null.

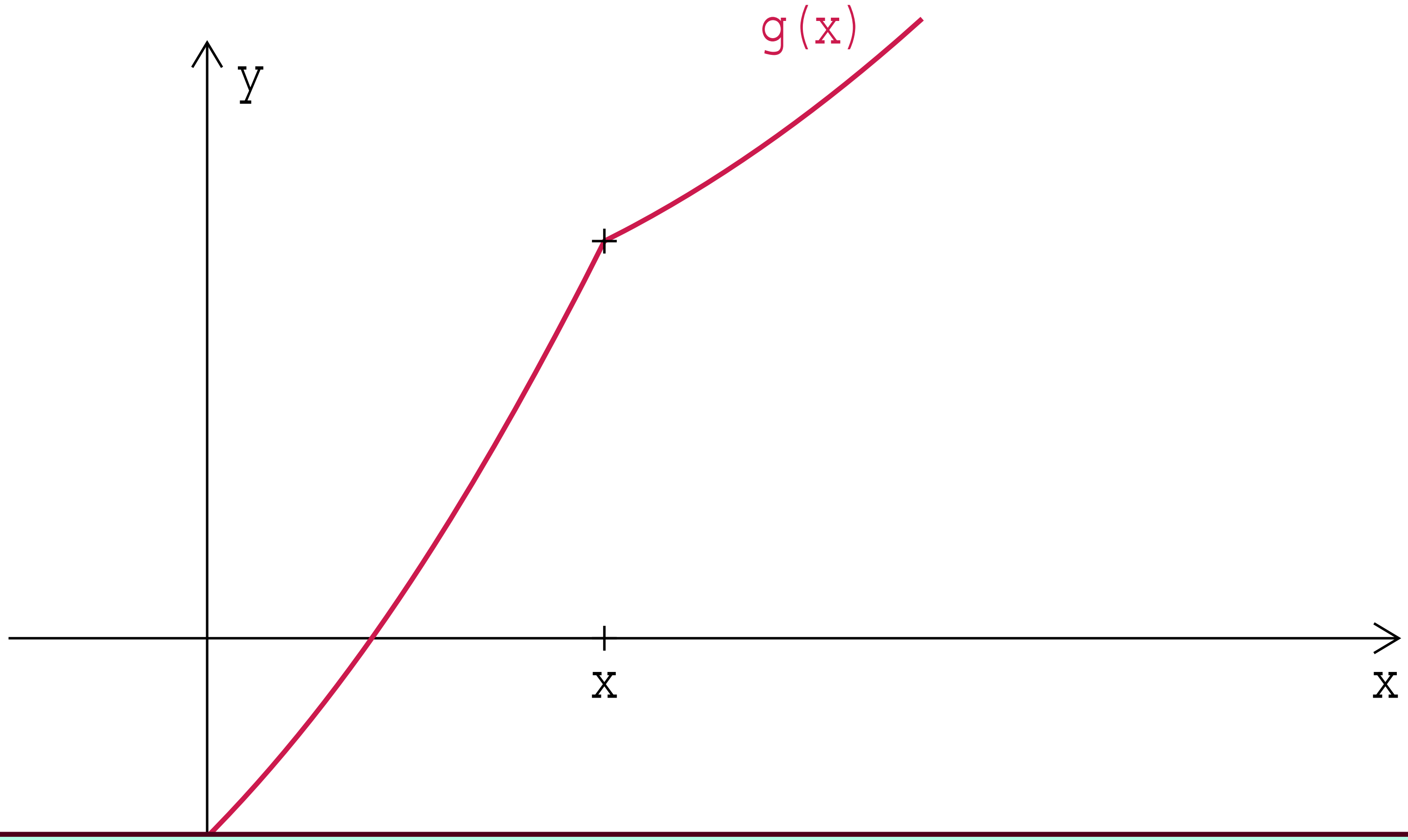
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x)$$

Wenn dieser Grenzwert existiert und für $\Delta x<0$ **und** $\Delta x>0$ gleich ist, so heißt die Funktion f **differenzierbar** an der Stelle x. Die so erhaltene Funktion f' nennt man **Ableitung** von f.

Die Differenzialschreibweise dy/dx, in der man die infinitesimal kleinen Größen dx und dy wie Variablen behandeln kann, stammt von Leibniz *(Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716)*.

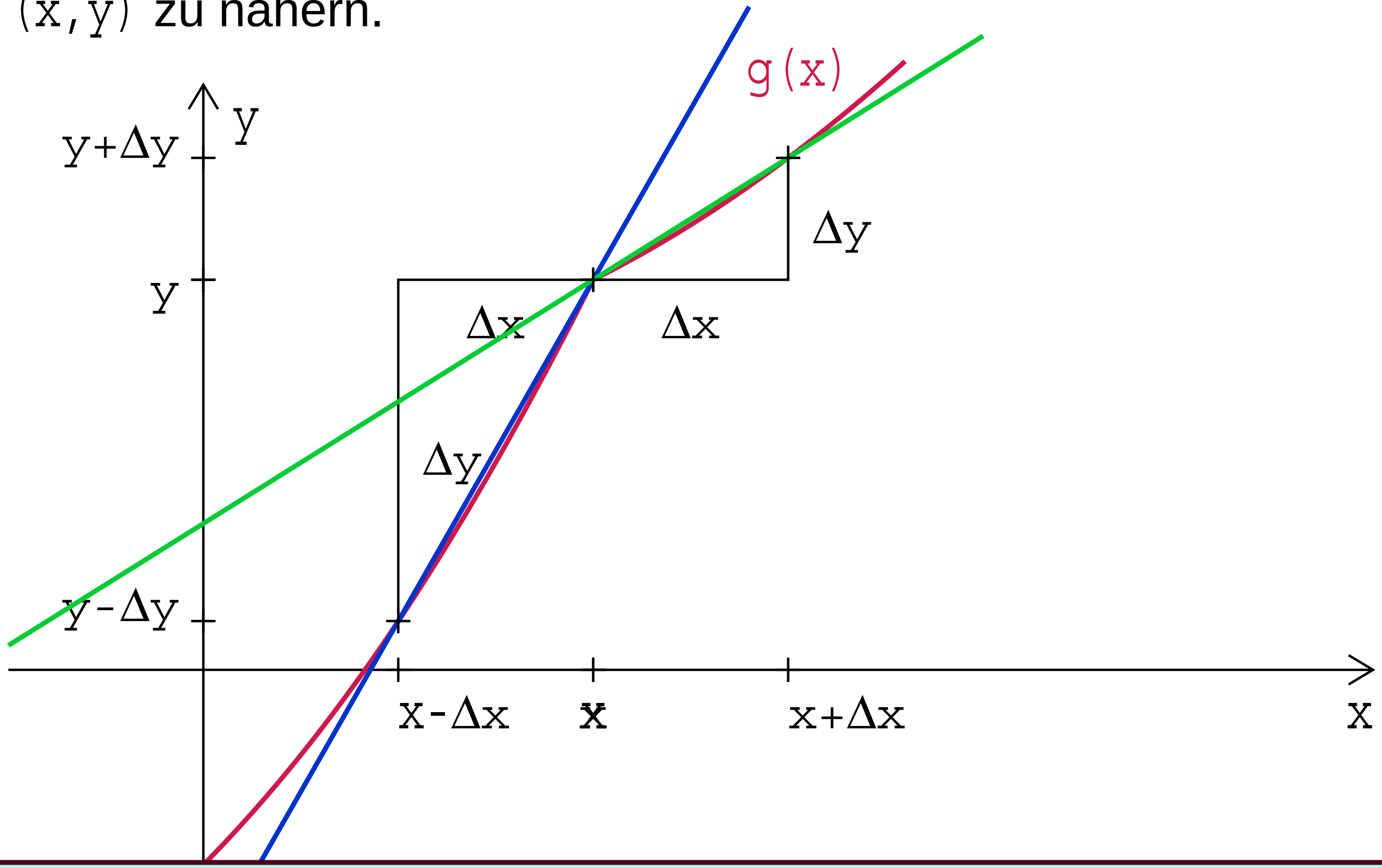
Differenzierbarkeit

Die folgende Funktion g(x) ist an der Stelle x **nicht** differenzierbar.



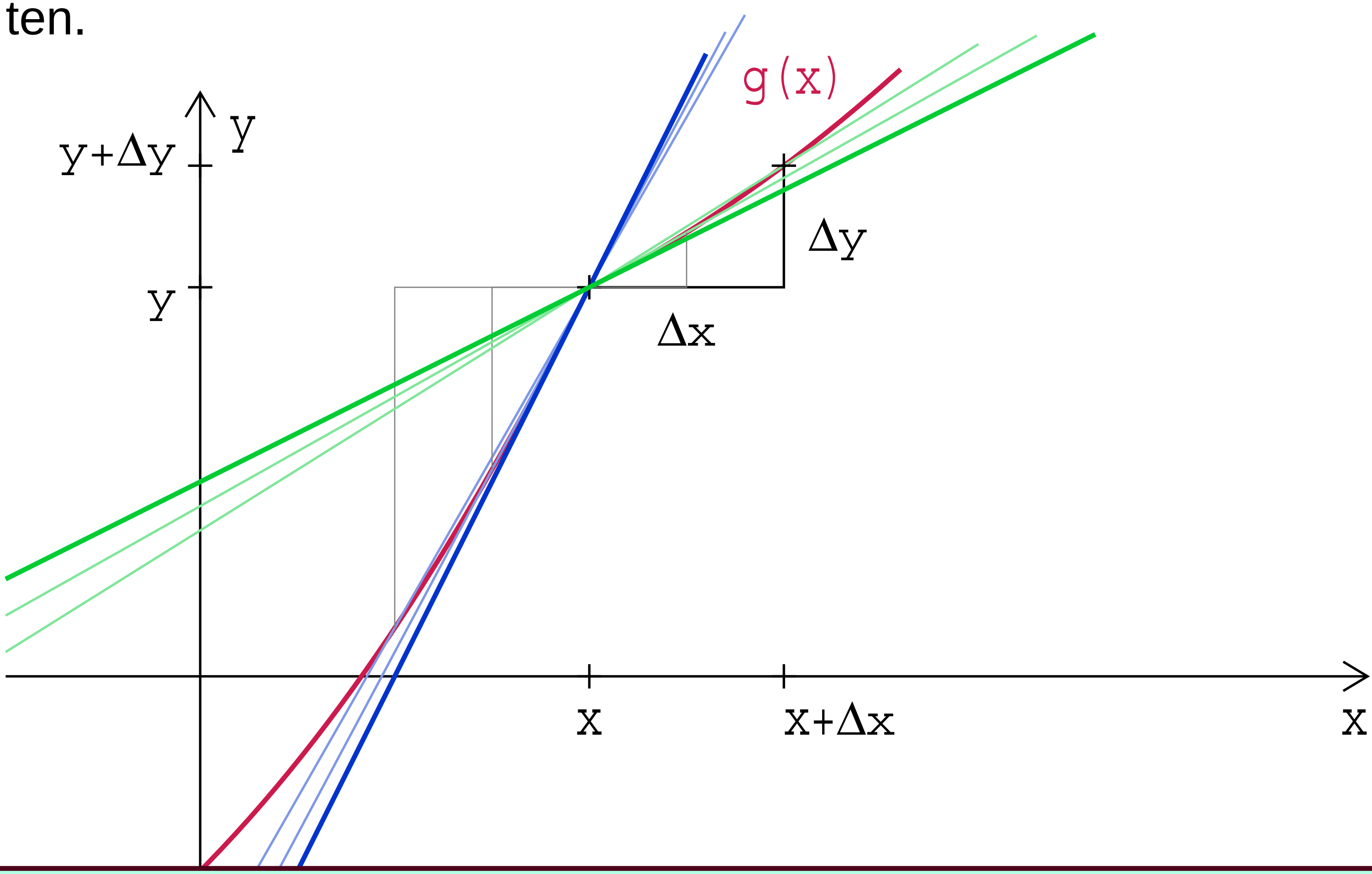
Differenzierbarkeit

Wir versuchen uns mit einer Sekante von unten und mit einer von oben dem Punkte (x,y) zu nähern.



Differenzierbarkeit

Nun lassen wir beide Δx gegen Null gehen und erhalten zwei verschiedene Tangenten.



Differenzialquotient

Beispiele für Differenzialquotienten:

$$f(x) = x^2$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 - x^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 2x + \Delta x$$

$$= 2x$$

Ableitungsregeln

Die Ableitung einer konstanten Funktion $f(x) = a$ ist Null.

$$f(x) = a$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a-a}{\Delta x}$$

$$= 0$$

Ableitungsregeln

Ist eine Funktion $f(x)$ Produkt einer Konstanten a mit einer Funktion $g(x)$, so ist die Ableitung $f'(x)$ Produkt derselben mit der Ableitung $g'(x)$.

$$f(x) = a \cdot g(x)$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a \cdot g(x+\Delta x)-a \cdot g(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a \cdot (g(x+\Delta x)-g(x))}{\Delta x}$$

$$= a \cdot g'(x)$$

Ableitungsregeln

Ist eine Funktion $f(x)$ Summe oder Differenz zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, so ist auch die Ableitung $f'(x)$ Summe oder Differenz der Ableitungen $g'(x)$ und $h'(x)$.

$$f(x) = g(x) \pm h(x)$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(g(x+\Delta x) \pm h(x+\Delta x))-(g(x) \pm h(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(g(x+\Delta x)-g(x)) \pm (h(x+\Delta x)-h(x))}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$

$$= g'(x) \pm h'(x)$$

Produktregel

Ist eine Funktion $f(x)$ Produkt zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, so ist die Ableitung gleich $g'(x)h(x)+g(x)h'(x)$.

$$f(x) = g(x)\cdot h(x)$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x+\Delta x)-g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)\cdot h(x+\Delta x)\overbrace{-g(x)\cdot h(x+\Delta x)+g(x)\cdot h(x+\Delta x)}^{=0\,*}-g(x)\cdot h(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}\cdot h(x+\Delta x) + g(x)\cdot\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}\right)$$

$$= g'(x)\cdot h(x)+g(x)\cdot h'(x)$$

*: Es wird ein Ausdruck mit Wert 0 eingefügt.

Ableitungsregeln

Ist eine Funktion $f(x)$ Potenz x^n, so ist die Ableitung $f'(x)$ gleich $n \cdot x^{n-1}$.

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^n - x^n}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} \Delta x + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \;...\; + \Delta x^n - x^n \right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\binom{n}{1} x^{n-1} x + \binom{n}{2} x^{n-2} \Delta x^2 + \;...\; + \Delta x^{n-1} \right)$$

$$= n \cdot x^{n-1}$$

Ableitungsregeln

Die Ableitung einer Potenz x^n lässt sich auch mit Hilfe der Produktregel herleiten:

$$f(x) = x^n$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = (x^n)' = (x^{n-1} \cdot x)'$$

$$= (x^{n-1})' \cdot x + x^{n-1} \cdot x'$$

$$= (n-1) x^{n-2} \cdot x + x^{n-1} \cdot 1$$

$$= n \cdot x^{n-1}$$

Ableitungsregeln

Ist eine Funktion $f(x)$ das Reziproke $1/g(x)$ einer Funktion $g(x)$ so ist die Ableitung gleich $-g'(x)/g^2(x)$.

$$f(x) = \frac{1}{g(x)}$$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \left(\frac{1}{g(x+\Delta x)} - \frac{1}{g(x)}\right)$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \frac{g(x)-g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} -\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x} \cdot \frac{1}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}$$

$$= -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

Quotientenregel

Ist eine Funktion $f(x)$ Quotient zweier Funktionen $g(x)$ und $h(x)$, so ist die Ableitung gleich $g'(x)h(x)-g(x)h'(x)/h^2(x)$.

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = g(x)\cdot\frac{1}{h(x)}$$

$$f'(x) = g'(x)\cdot\frac{1}{h(x)} - g(x)\cdot\frac{h'(x)}{h^2(x)}$$

$$= \frac{g'(x)\cdot h(x)-g(x)\cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

Kettenregel

Besteht eine Funktion $f(x)$ aus der Hintereinanderausführung zweier Funktionen $g(h(x))$ und $h(x)$, so ist die Ableitung gleich $h'(x)g'(h(x))$.

$$f(x) \quad = g(h(x))$$

Sei $z = h(x)$, dann ist $\Delta z = h(x+\Delta x)-h(x)$

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta x} \quad *$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0} \frac{g(z+\Delta z)-g(z)}{\Delta z}\cdot\frac{h(x+\Delta x)-h(x)}{\Delta x}$$

$$= g'(h(x))\cdot h'(x)$$

*: Erweiterung mit Δz

Beispiele für Ableitungen

$f(x) = x \cdot \sin x$

Hier muss die Produktregel angewandt werden:

$f(x) = g(x) \cdot h(x)$

$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$

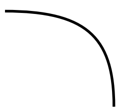
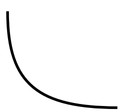
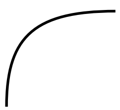
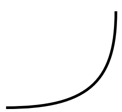
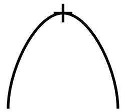
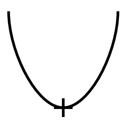
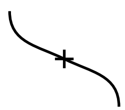
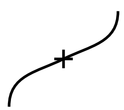
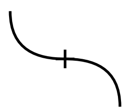
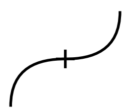
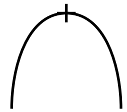
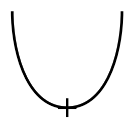
$h(x) = \sin x \qquad h'(x) = \cos x$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$= 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x$$

Höhere Ableitungen

Ist die Ableitung einer Funktion differenzierbar, so kann man weitere **höhere** Ableitungen bilden. Während die erste Ableitung die Steigung einer Funktion angibt, beschreibt die zweite die **Krümmung**. Wenn die Steigung zunimmt, spricht man von **positiver** wenn sie abnimmt von **negativer** Krümmung.

f(x)												
f′(x)	<0	<0	>0	>0	=0	=0	<0	>0	=0	=0	=0	=0
f′′(x)	<0	>0	<0	>0	<0	>0	=0	=0	=0	=0	=0	=0
					(1)	(2)	(3)	(3)	(4)	(4)		

(1) relatives Maximum, (2) relatives Minimum, (3) Wendepunkt, (4) Sattelpunkt